

त्रिकोणमितीय फलन

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» त्रिकोणमिति की भूमिका और कोण की परिभाषा

प्रश्न 1 (आसान). त्रिकोणमिति शब्द किन दो ग्रीक शब्दों से बना है?

उत्तर – Trigon और Metron

प्रश्न 2 (आसान). घड़ी की सुई की दिशा में (clockwise) घूमने पर कोण का चिन्ह क्या होता है?

उत्तर – ऋणात्मक (-)

प्रश्न 3 (मध्यम). अगर एक किरण पहले ऊपर की तरफ है और फिर उसे 60 डिग्री 'वामावर्त' (anticlockwise) घुमाया जाता है, तो कोण का मान और चिन्ह क्या होगा?

उत्तर – +60 डिग्री

प्रश्न 4 (कठिन). एक फुटबॉल खिलाड़ी किक मारते समय अपने पैर को शरीर से दूर ले जाकर 45 डिग्री का कोण बनाता है और फिर गेंद को मारने के लिए 135 डिग्री 'घड़ी की सुई की दिशा में' घुमाता है। उसके पैर का कुल प्रभावी घुमाव कितने डिग्री का ऋणात्मक कोण होगा (प्रारंभिक स्थिति को 0 डिग्री मानकर)?

उत्तर – -90 डिग्री (45 डिग्री बाहर की ओर धनात्मक है, फिर 135 डिग्री घड़ी की दिशा में -135. तो $45 - 135 = -90$)

» कोणों की डिग्री माप

प्रश्न 5 (आसान). 45° को मिनट में बदलें।

उत्तर – $45 \times 60 = 2700$

प्रश्न 6 (आसान). 120 को डिग्री में बदलें।

उत्तर – $120 / 60 = 2^\circ$

प्रश्न 7 (मध्यम). $25^\circ 30'$ को केवल डिग्री में व्यक्त करें।

उत्तर – 25.5°

प्रश्न 8 (कठिन). $30^\circ 45' 30''$ को केवल डिग्री में व्यक्त करें।

उत्तर – 30.7583° (लगभग)

» कोणों की रेडियन माप

प्रश्न 9 (आसान). 60° को रेडियन माप में बदलिए।

उत्तर – $/3$ रेडियन

प्रश्न 10 (आसान). $/2$ रेडियन को डिग्री माप में बदलिए।

उत्तर – 90°

प्रश्न 11 (मध्यम). 120° को रेडियन माप में बदलिए।

उत्तर – $2/3$ रेडियन

प्रश्न 12 (कठिन). एक वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है। 14 सेमी लंबे चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण (रेडियन में) ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 2 रेडियन

» रेडियन और वास्तविक संख्याओं के बीच संबंध

प्रश्न 13 (आसान). क्या एक इकाई वृत्त पर 'रेडियन' की माप एक वास्तविक संख्या को दर्शाती है? हाँ या ना।

उत्तर – हाँ

प्रश्न 14 (आसान). इकाई वृत्त पर यदि कोई वास्तविक संख्या 'x' रेडियन कोण बनाती है, तो वृत्त के चाप की लंबाई कितनी होगी?

उत्तर – x इकाई

प्रश्न 15 (मध्यम). यदि आप इकाई वृत्त पर घड़ी की दिशा में 3 इकाई चलते हैं, तो यह किस वास्तविक संख्या और रेडियन माप को दर्शाएगा?

उत्तर – -3 वास्तविक संख्या और -3 रेडियन

प्रश्न 16 (कठिन). इकाई वृत्त पर, बिंदु A से शुरू करके 2 इकाई की दूरी तय करने पर आप किस बिंदु पर पहुंचेंगे और यह कितने रेडियन कोण को दर्शाएगा?

उत्तर – आप वापस बिंदु A पर पहुंचेंगे और यह 2 रेडियन कोण को दर्शाएगा।

» डिग्री और रेडियन माप के बीच संबंध और रूपांतरण

प्रश्न 17 (आसान). 90° को रेडियन माप में बदलें।

उत्तर – $\pi/2$ रेडियन

प्रश्न 18 (आसान). $\pi/3$ रेडियन को डिग्री माप में बदलें।

उत्तर – 60°

प्रश्न 19 (मध्यम). 150° को रेडियन माप में बदलें।

उत्तर – $5\pi/6$ रेडियन

प्रश्न 20 (कठिन). $7\pi/12$ रेडियन को डिग्री माप में बदलें।

उत्तर – 105°

» त्रिकोणमितीय फलनों की परिभाषा

प्रश्न 21 (आसान). यदि इकाई वृत्त पर बिंदु P (-1, 0) है, तो $\sin x$ और $\cos x$ का मान क्या होगा?

उत्तर – $\sin x = 0$, $\cos x = -1$

प्रश्न 22 (आसान). यदि $\sin x = 0.6$ और $\cos x = 0.8$ है, तो क्या ये मान इकाई वृत्त पर एक वैध बिंदु दर्शाते हैं? कारण बताएं।

उत्तर – हाँ, क्योंकि $(0.6)^2 + (0.8)^2 = 0.36 + 0.64 = 1$ । ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)।

प्रश्न 23 (मध्यम). यदि $\cos x = -1/2$ और x दूसरे चतुर्थांश (second quadrant) में है, तो $\sin x$ और $\tan x$ का मान ज्ञात करें।

उत्तर – $\sin x = 3/2$, $\tan x = -3$

प्रश्न 24 (कठिन). यदि एक इकाई वृत्त पर P (a, b) एक बिंदु है, और $b = -2a$ है, तो a और b के मान ज्ञात करें।

उत्तर – $a = \pm 1/5$, $b = 2/5$

» चतुर्थांशीय कोण और आवधिकता

प्रश्न 25 (आसान). $\cos(9/2)$ का मान ज्ञात करें।

उत्तर – 0

प्रश्न 26 (आसान). $\tan(3)$ का मान ज्ञात करें।

उत्तर – 0

प्रश्न 27 (मध्यम). उस कोण 'x' का सबसे छोटा धनात्मक मान ज्ञात करें जिसके लिए $\sin x = 0$ हो।

उत्तर –

प्रश्न 28 (कठिन). यदि $\cos x = 0$, तो x के सभी संभव मानों को सामान्य रूप में व्यक्त करें।

उत्तर – $x = (2n + 1)\pi/2$, जहाँ $n \in \mathbb{Z}$

» त्रिकोणमितीय फलनों के चिन्ह

प्रश्न 29 (आसान). $\sin x$ किस चतुर्थांश में धनात्मक होता है?

उत्तर – प्रथम और द्वितीय चतुर्थांश

प्रश्न 30 (आसान). यदि $\cos x = 0.5$ है और x चतुर्थ चतुर्थांश में है, तो $\sin x$ का चिन्ह क्या होगा?

उत्तर – ऋणात्मक

प्रश्न 31 (मध्यम). $\tan x$ का चिन्ह तीसरे चतुर्थांश में क्या होता है? और $\tan(-x) =$ क्या होगा?

उत्तर – तीसरे चतुर्थांश में $\tan x$ धनात्मक होता है। $\tan(-x) = -\tan x$ होगा।

प्रश्न 32 (कठिन). यदि $\operatorname{cosec} x = -2/3$ हो और x तीसरे चतुर्थांश में हो, तो $\cot x$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $\cot x = 1/3$

» त्रिकोणमितीय फलनों का प्रांत और परिसर

प्रश्न 33 (आसान). $\sin x$ का प्रांत क्या है?

उत्तर – सभी वास्तविक संख्याएँ ($\mathbb{R}$)

प्रश्न 34 (आसान). $\cos x$ का परिसर क्या है?

उत्तर – $[-1, 1]$

प्रश्न 35 (मध्यम). $\operatorname{cosec} x$ का प्रांत क्या है?

उत्तर – $\mathbb{R} - \{x \mid x = n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

प्रश्न 36 (कठिन). $\sec x$ का परिसर क्या है?

उत्तर – $\mathbb{R} - (-1, 1)$ या $(-, -1] \cup [1,)$

» विभिन्न चतुर्थांशों में फलनों के मानों का परिवर्तन

प्रश्न 37 (आसान). दूसरे चतुर्थांश में $\sin$ का मान धनात्मक होगा या ऋणात्मक?

उत्तर – धनात्मक

प्रश्न 38 (आसान). चौथे चतुर्थांश में $\tan$ का मान धनात्मक होगा या ऋणात्मक?

उत्तर – ऋणात्मक

प्रश्न 39 (मध्यम). यदि $\sin x = 3/5$ और x दूसरे चतुर्थांश में है, तो $\cos x$ और $\tan x$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $\cos x = -4/5$, $\tan x = -3/4$

प्रश्न 40 (कठिन). यदि $\tan x = -5/12$ और x दूसरे चतुर्थांश में है, तो $\sec x$ और $\operatorname{cosec} x$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $\sec x = -13/5$, $\operatorname{cosec} x = 13/12$

» दो कोणों के योग और अंतर के त्रिकोणमितीय फलन

प्रश्न 41 (आसान). यदि $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ है, तो $\cos(30^\circ + 60^\circ)$ का मान ज्ञात करने के लिए x और y का मान क्या होगा?

उत्तर – $x = 30^\circ, y = 60^\circ$

प्रश्न 42 (आसान). सूत्र $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ में, अगर $x=90^\circ$ और $y=30^\circ$ हो, तो बीच में कौन सा चिन्ह आएगा?

उत्तर – प्लस (+)

प्रश्न 43 (मध्यम). $\cos(75^\circ)$ का मान ज्ञात कीजिए। (Hint: $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$)

उत्तर – $(3 - 1) / (22)$

प्रश्न 44 (कठिन). सिद्ध कीजिए कि $\cos(x - 90^\circ) = \sin x$ होता है।

उत्तर – $\cos(x - 90^\circ) = \cos x \cos 90^\circ + \sin x \sin 90^\circ = \cos x (0) + \sin x (1) = 0 + \sin x = \sin x$

» $\sin(x + y)$ और $\sin(x - y)$ के सूत्र

प्रश्न 45 (आसान). $\sin(60^\circ + 30^\circ)$ का मान ज्ञात करने के लिए कौन सा सूत्र उपयोग करेंगे?

उत्तर – $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

प्रश्न 46 (आसान). $\sin(A - B)$ के सूत्र में बीच में कौन सा चिन्ह आता है?

उत्तर – माइनस (-)

प्रश्न 47 (मध्यम). $\sin 15^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $\sin 15^\circ = (3 - 1) / (22)$

प्रश्न 48 (कठिन). सिद्ध कीजिए: $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$

उत्तर – बायाँ पक्ष = $(\sin x \cos y + \cos x \sin y) + (\sin x \cos y - \cos x \sin y) = 2 \sin x \cos y =$ दायाँ पक्ष।

» $\tan(x + y)$ और $\tan(x - y)$ के सूत्र

प्रश्न 49 (आसान). $\tan(30^\circ + 45^\circ)$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – -1

प्रश्न 50 (आसान). यदि $x = 60^\circ$ और $y = 30^\circ$ हो, तो $\tan(x - y)$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $1/3$

प्रश्न 51 (मध्यम). यदि $\tan x = 1/2$ और $\tan y = 1/3$, तो $\tan(x + y)$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 1

प्रश्न 52 (कठिन). सिद्ध कीजिए: $\tan(4 + x) = (1 + \tan x) / (1 - \tan x)$

उत्तर – प्रमाणित

» $\cot(x + y)$ और $\cot(x - y)$ के सूत्र

प्रश्न 53 (आसान). $\cot(x + y)$ के सूत्र में अंश (numerator) में 'plus 1' आएगा या 'minus 1'?

उत्तर – 'minus 1'

प्रश्न 54 (आसान). $\cot(x - y)$ के सूत्र में हर (denominator) में ' $\cot x - \cot y$ ' आता है या ' $\cot y - \cot x$ '?

उत्तर – ' $\cot y - \cot x$ '

प्रश्न 55 (मध्यम). $\cot(75^\circ)$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $\cot(75^\circ) = \cot(45^\circ + 30^\circ) = (\cot 45^\circ \cot 30^\circ - 1) / (\cot 30^\circ + \cot 45^\circ) = (1 * 3 - 1) / (3 + 1) = (3 - 1) / (3 + 1) = (3 - 1)^2 / ((3)^2 - 1^2) = (3 + 1 - 23) / (3 - 1) = (4 - 23) / 2 = 2 - 3$

प्रश्न 56 (कठिन). यदि $\cot x = 1/2$ और $\cot y = 1/3$ हो, तो $\cot(x + y)$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $\cot(x + y) = (\cot x \cot y - 1) / (\cot y + \cot x) = ((1/2) * (1/3) - 1) / (1/3 + 1/2) = ((1/6) - 1) / ((2 + 3)/6) = (-5/6) / (5/6) = -1$

» गुणन से योग और अंतर में रूपांतरण (CD सूत्र)

प्रश्न 57 (आसान). $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $6 / 2$

प्रश्न 58 (आसान). $\sin 45^\circ - \sin 15^\circ$ को गुणनफल के रूप में लिखिए।

उत्तर – $2 \cos 30^\circ \sin 15^\circ$

प्रश्न 59 (मध्यम). सिद्ध कीजिए: $(\sin 5x + \sin 3x) / (\cos 5x + \cos 3x) = \tan 4x$

उत्तर – बायाँ पक्ष = $(2 \sin((5x+3x)/2) \cos((5x-3x)/2)) / (2 \cos((5x+3x)/2) \cos((5x-3x)/2)) = (2 \sin 4x \cos x) / (2 \cos 4x \cos x) = \sin 4x / \cos 4x = \tan 4x =$ दायाँ पक्ष

प्रश्न 60 (कठिन). सिद्ध कीजिए: $(\sin x + \sin 3x + \sin 5x) / (\cos x + \cos 3x + \cos 5x) = \tan 3x$

उत्तर – बायाँ पक्ष = $((\sin x + \sin 5x) + \sin 3x) / ((\cos x + \cos 5x) + \cos 3x) = (2 \sin 3x \cos 2x + \sin 3x) / (2 \cos 3x \cos 2x + \cos 3x) = (\sin 3x (2 \cos 2x + 1)) / (\cos 3x (2 \cos 2x + 1)) = \sin 3x / \cos 3x = \tan 3x =$ दायाँ पक्ष

» योग और अंतर से गुणन में रूपांतरण (2AB सूत्र)

प्रश्न 61 (आसान). $2 \cos 40^\circ \cos 10^\circ$ को योग या अंतर के रूप में लिखिए।

उत्तर – $\cos 50^\circ + \cos 30^\circ$

प्रश्न 62 (आसान). $2 \sin 6x \cos 4x$ को योग या अंतर के रूप में लिखिए।

उत्तर – $\sin 10x + \sin 2x$

प्रश्न 63 (मध्यम). सिद्ध कीजिए: $2 \cos 5x \sin 3x = \sin 8x - \sin 2x$

उत्तर – LHS = $2 \cos 5x \sin 3x$. सूत्र $2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$ का उपयोग करने पर, $= \sin(5x + 3x) - \sin(5x - 3x) = \sin 8x - \sin 2x =$ RHS. (सिद्धि हुआ)

प्रश्न 64 (कठिन). सिद्ध कीजिए: $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4 \cos^2((x+y)/2)$

उत्तर – LHS = $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = (2 \cos((x+y)/2) \cos((x-y)/2))^2 + (2 \cos((x+y)/2) \sin((x-y)/2))^2$ (CD सूत्रों का उपयोग करके) $= 4 \cos^2((x+y)/2) \cos^2((x-y)/2) + 4 \cos^2((x+y)/2) \sin^2((x-y)/2) = 4 \cos^2((x+y)/2) [\cos^2((x-y)/2) + \sin^2((x-y)/2)]$ ($4 \cos^2((x+y)/2)$ कॉमन लेने पर) $= 4 \cos^2((x+y)/2) * 1$ (क्योंकि $\sin^2 + \cos^2 = 1$) $= 4 \cos^2((x+y)/2) =$ RHS. (सिद्धि हुआ)

» बहु कोण सूत्र (2x और 3x)

प्रश्न 65 (आसान). यदि $x = 30^\circ$ है, तो $\cos 2x$ का मान ज्ञात करें।

उत्तर – $\cos 2x = \cos 60^\circ = 1/2$

प्रश्न 66 (आसान). यदि $\tan x = 1$ है, तो $\tan 2x$ का मान ज्ञात करें।

उत्तर – $\tan 2x = (2*1)/(1-1^2) = 2/0$, जो अपरिभाषित है। (अर्थात् $2x = 90^\circ$ या $/2$)

प्रश्न 67 (मध्यम). यदि $\cos x = 1/2$ है, तो $\sin 2x$ का मान ज्ञात करें (x प्रथम चतुर्थांश में है)।

उत्तर – $\sin x = 3/2$, $\sin 2x = 2 * (3/2) * (1/2) = 3/2$

प्रश्न 68 (कठिन). सिद्ध कीजिए: $(\sin 2x) / (1 + \cos 2x) = \tan x$

उत्तर – बायाँ पक्ष = $(2 \sin x \cos x) / (1 + (2 \cos^2 x - 1)) = (2 \sin x \cos x) / (2 \cos^2 x) = \sin x / \cos x = \tan x =$ दायाँ पक्ष

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. एक किरण बिंदु O से शुरू होकर, पहले क्षैतिज (horizontal) रूप से दाईं ओर है, फिर उसे 90 डिग्री घड़ी की सुई की दिशा में घुमाया जाता है। यह किस प्रकार का कोण है?

- › पहला कदम: किरण की प्रारंभिक स्थिति क्षैतिज रूप से दाईं ओर है। इसे 'प्रारंभिक भुजा' कहते हैं।
- › दूसरा कदम: किरण को 90 डिग्री 'घड़ी की सुई की दिशा में' (clockwise) घुमाया जाता है।
- › तीसरा कदम: 'घड़ी की सुई की दिशा में' घुमाव का मतलब है दक्षिणावर्त घुमाव।
- › चौथा कदम: दक्षिणावर्त घुमाव वाले कोण को ऋणात्मक कोण कहा जाता है।

उत्तर – यह -90 डिग्री का ऋणात्मक कोण है।

उदाहरण 2. $30^\circ 15'$ को केवल डिग्री में व्यक्त करें।

- › हमें पता है कि $1^\circ = 60'$ होता है, तो $1' = (1/60)^\circ$ ।
- › अब, 15 को डिग्री में बदलने के लिए हम लिखेंगे $15' = 15 \times (1/60)^\circ$ ।
- › इसे सरल करने पर $15/60 = 1/4^\circ$ मिलता है।
- › तो, $30^\circ 15' = 30^\circ + (1/4)^\circ = 30^\circ + 0.25^\circ$ ।
- › अंतिम परिणाम 30.25° है।

उत्तर – 30.25°

उदाहरण 3. 45° के कोण को रेडियन माप में बदलिए।

- › हमें पता है कि $180^\circ = \pi$ रेडियन होता है।
- › तो $1^\circ = \pi/180$ रेडियन होगा।
- › इसलिए, $45^\circ = 45 \times (\pi/180)$ रेडियन होगा।
- › 45 को 180 से भाग देने पर, हमें $1/4$ मिलता है।
- › तो, $45^\circ = \pi/4$ रेडियन।

उत्तर – $45^\circ = \pi/4$ रेडियन

उदाहरण 4. यह समझाएं कि इकाई वृत्त पर कैसे '2 रेडियन' की माप एक वास्तविक संख्या '2' को दर्शाती है।

- › सबसे पहले, हम 'इकाई वृत्त' (unit circle) लेते हैं, जिसका केंद्र मूल बिंदु (origin) पर होता है और त्रिज्या (radius) 1 इकाई होती है।
- › अब, हम वृत्त के बिंदु A को वास्तविक संख्या '0' मानते हैं।
- › हमें पता है कि '1 रेडियन' वह कोण होता है जो इकाई त्रिज्या के वृत्त पर '1 इकाई लंबाई' का चाप (arc) बनाता है।
- › तो, अगर हमें '2 रेडियन' को दिखाना है, तो इसका मतलब है कि हम वृत्त के चाप पर '2 इकाई लंबाई' जितनी दूरी तय करेंगे।
- › इस '2 इकाई लंबाई' की दूरी को जब हम बिंदु A से शुरू करके घड़ी की विपरीत दिशा में नापेंगे, तो जहाँ पर यह दूरी खत्म होगी, वही बिंदु '2 रेडियन' कोण को दर्शाएगा। और यही '2' एक वास्तविक संख्या भी है।
- › इसलिए, '2 रेडियन' की माप सीधे-सीधे वास्तविक संख्या '2' से जुड़ी हुई है, जहाँ '2' चाप की लंबाई को दर्शाता है।

उत्तर – इकाई वृत्त पर 2 इकाई लंबाई का चाप केंद्र पर 2 रेडियन का कोण बनाता है, और यह '2' वास्तविक संख्या 2 को दर्शाता है।

उदाहरण 5. 45° को रेडियन माप में बदलें।

- › हमें पता है कि रेडियन = 180° होता है।
- › तो, $1^\circ = 1/180$ रेडियन होगा।
- › इसलिए, 45° को रेडियन में बदलने के लिए हम 45 को $(1/180)$ से गुणा करेंगे।
- › $45^\circ = 45 \times (1/180)$ रेडियन
- › जब हम 45 और 180 को काटते हैं, तो 180, 45 से चार बार कटता है।
- › तो, $45^\circ = 1/4$ रेडियन।

उत्तर – $1/4$ रेडियन**उदाहरण 6. यदि एक इकाई वृत्त पर बिंदु P के निर्देशांक $(3/5, 4/5)$ हैं, तो $\sin x$, $\cos x$ और $\tan x$ का मान ज्ञात कीजिए।**

- › हमें दिया गया है कि बिंदु P के निर्देशांक $(3/5, 4/5)$ हैं।
- › इकाई वृत्त की परिभाषा के अनुसार, $P(a, b)$ में $a = \cos x$ और $b = \sin x$ होता है।
- › तो, $\cos x = 3/5$ और $\sin x = 4/5$ ।
- › $\tan x$ की परिभाषा है: $\tan x = \sin x / \cos x$ ।
- › मान रखने पर, $\tan x = (4/5) / (3/5)$ ।
- › $\tan x = 4/3$ ।

उत्तर – $\sin x = 4/5$, $\cos x = 3/5$, $\tan x = 4/3$ **उदाहरण 7. $\sin(7/2)$ का मान ज्ञात कीजिए।**

- › सबसे पहले, $7/2$ को 2 के गुणांक के रूप में लिखें ताकि हम आवधिकता का उपयोग कर सकें।
- › $7/2 = 3 + 1/2$. हम जानते हैं कि $3 = 2 + 1$.
- › तो $7/2 = 2 + 1 + 1/2 = 2 + 3/2$.
- › अब हम आवधिकता का नियम लगाएंगे: $\sin(x + 2n) = \sin x$.
- › इसलिए, $\sin(7/2) = \sin(2 + 3/2) = \sin(3/2)$.
- › हम जानते हैं कि $3/2$ एक चतुर्थांश कोण है। इकाई वृत्त पर $3/2$ पर बिंदु $(0, -1)$ होता है।
- › तो $\sin(3/2) = -1$, क्योंकि यह y-निर्देशांक है।

उत्तर – $\sin(7/2) = -1$ **उदाहरण 8. यदि $\cos x = -3/5$ हो और x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिए।**

- › हमें दिया है $\cos x = -3/5$ । चूंकि x तृतीय चतुर्थांश में है, तो $\cos x$ ऋणात्मक होगा, जो दिया गया है।
- › सबसे पहले $\sec x$ निकाल लेते हैं, क्योंकि $\sec x = 1/\cos x$ होता है। तो, $\sec x = 1/(-3/5) = -5/3$ ।
- › अब $\sin x$ निकालने के लिए हम जानते हैं कि $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ होता है। तो $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ।
- › $\sin^2 x = 1 - (-3/5)^2 = 1 - 9/25 = (25-9)/25 = 16/25$ ।
- › तो $\sin x = \pm(16/25) = \pm 4/5$ ।
- › अब देखो, x तृतीय चतुर्थांश में है, और हमने ASTC रूल से सीखा है कि तीसरे चतुर्थांश में सिर्फ $\tan$ और $\cot$ धनात्मक होते हैं, $\sin$ ऋणात्मक होता है। तो, $\sin x = -4/5$ ।
- › अब $\operatorname{cosec} x$ निकालते हैं, $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x = 1/(-4/5) = -5/4$ ।
- › अब $\tan x$ निकालते हैं, $\tan x = \sin x / \cos x = (-4/5) / (-3/5) = (-4/5) * (-5/3) = 4/3$ । (देखो, तीसरे चतुर्थांश में $\tan x$ धनात्मक आया, एकदम सही!)
- › आखिर में $\cot x$ निकालते हैं, $\cot x = 1/\tan x = 1/(4/3) = 3/4$ ।

उत्तर – $\sin x = -4/5$, $\operatorname{cosec} x = -5/4$, $\tan x = 4/3$, $\cot x = 3/4$, $\sec x = -5/3$.

उदाहरण 9. फलन 'y = tan x' का प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

- › पहला कदम, हम यह देखेंगे कि 'tan x' को हम 'sin x / cos x' के रूप में लिख सकते हैं।
- › अब, 'denominator' यानी 'cos x' कभी भी शून्य नहीं होना चाहिए, क्योंकि अगर 'cos x' शून्य हो गया, तो 'tan x undefined' हो जाएगा।
- › हम जानते हैं कि 'cos x' शून्य कब होता है? जब 'x' '1/2', '3/2', '5/2' आदि का 'odd multiple' होता है। या हम कह सकते हैं 'x = (2n + 1)/2', जहाँ 'n' कोई पूर्णांक है।
- › इसलिए, 'tan x' का 'प्रांत' सभी 'वास्तविक संख्याएँ' होंगी, सिवाय 'odd multiples of 1/2' के। इसे हम $R - \{x \mid x = (2n + 1)/2, n \in \mathbb{Z}\}$ लिखते हैं।
- › अब, 'परिसर' की बात करें। 'tan x' का मान 'negative infinity' से 'positive infinity' तक कुछ भी हो सकता है। ग्राफ याद करो, ये ऊपर और नीचे दोनों तरफ अनंत तक जाता है।
- › तो 'tan x' का 'परिसर' सभी 'वास्तविक संख्याओं' का समुच्चय यानी R होता है।

उत्तर – फलन $y = \tan x$ का प्रांत $R - \{x \mid x = (2n + 1)/2, n \in \mathbb{Z}\}$ है और परिसर R है।

उदाहरण 10. यदि $\cos x = -3/5$ हो और x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिए।

- › पहला कदम: हमें दिया गया है $\cos x = -3/5$ । क्योंकि x तीसरे चतुर्थांश में है, तो $\cos x$ ऋणात्मक ही होगा, जो हमें दिया है।
- › दूसरा कदम: हम जानते हैं कि $\sec x = 1/\cos x$ होता है, तो $\sec x = 1 / (-3/5) = -5/3$ । यह भी तीसरे चतुर्थांश में ऋणात्मक होता है, बिल्कुल सही।
- › तीसरा कदम: अब $\sin x$ निकालने के लिए हम सर्वसमिका $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ का प्रयोग करेंगे। $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - (-3/5)^2 = 1 - 9/25 = 16/25$ ।
- › चौथा कदम: तो $\sin x = \pm(16/25) = \pm 4/5$ । अब सोचो, x तीसरे चतुर्थांश में है, और हमने अभी सीखा कि 'in the third quadrant, sin x is negative'। इसलिए हम $\sin x = -4/5$ लेंगे।
- › पाँचवाँ कदम: $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x = 1 / (-4/5) = -5/4$ ।
- › छठा कदम: $\tan x = \sin x / \cos x = (-4/5) / (-3/5) = 4/3$ । 'In the third quadrant, tan x is positive', तो यह धनात्मक आया, जो सही है।
- › सातवाँ कदम: $\cot x = 1/\tan x = 1 / (4/3) = 3/4$ ।

उत्तर – इसलिए, $\sin x = -4/5$, $\operatorname{cosec} x = -5/4$, $\sec x = -5/3$, $\tan x = 4/3$, $\cot x = 3/4$ ।

उदाहरण 11. $\cos(15^\circ)$ का मान ज्ञात कीजिए।

- › हमें $\cos(15^\circ)$ का मान ज्ञात करना है। हम 15° को दो ऐसे कोणों के अंतर के रूप में लिख सकते हैं जिनका मान हमें पता है, जैसे $45^\circ - 30^\circ$ ।
- › अब हम $\cos(x - y)$ के सूत्र का उपयोग करेंगे, जहाँ $x = 45^\circ$ और $y = 30^\circ$ ।
- › सूत्र है: $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- › मान रखने पर: $\cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$
- › हमें पता है कि: $\cos 45^\circ = 1/2$, $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, $\sin 45^\circ = 1/2$, $\sin 30^\circ = 1/2$
- › इन मानों को सूत्र में रखेंगे: $(1/2)(\sqrt{3}/2) + (1/2)(1/2)$
- › यह हो जाएगा: $3 / (22) + 1 / (22)$
- › अब इन्हें जोड़ेंगे: $(3 + 1) / (22)$

उत्तर – $\cos(15^\circ) = (3 + 1) / (22)$

उदाहरण 12. $\sin 75^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

- › हम जानते हैं कि $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ ।
- › अब हम $\sin(x + y)$ का सूत्र लगाएंगे: $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ ।
- › यहाँ $x = 45^\circ$ और $y = 30^\circ$ ।
- › तो, $\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$ ।
- › मान रखेंगे: $\sin 45^\circ = 1/2$, $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, $\cos 45^\circ = 1/2$, $\sin 30^\circ = 1/2$ ।
- › $\sin 75^\circ = (1/2) \times (\sqrt{3}/2) + (1/2) \times (1/2)$ ।
- › $\sin 75^\circ = \sqrt{3} / (2 \times 2) + 1 / (2 \times 2)$ ।
- › $\sin 75^\circ = (\sqrt{3} + 1) / (2 \times 2)$ ।

उत्तर – $\sin 75^\circ = (\sqrt{3} + 1) / (2 \times 2)$ **उदाहरण 13. $\tan 75^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।**

- › हम 75° को $45^\circ + 30^\circ$ लिख सकते हैं।
- › अब $\tan(x + y)$ का सूत्र लगाएंगे: $\tan(45^\circ + 30^\circ) = (\tan 45^\circ + \tan 30^\circ) / (1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ)$ ।
- › $\tan 45^\circ$ का मान 1 होता है और $\tan 30^\circ$ का मान $1/\sqrt{3}$ होता है।
- › मान रखने पर: $(1 + 1/\sqrt{3}) / (1 - 1 * 1/\sqrt{3})$ ।
- › इसे सरल करेंगे: $((\sqrt{3} + 1)/\sqrt{3}) / ((\sqrt{3} - 1)/\sqrt{3})$ ।
- › 3 से 3 कट जाएगा: $(\sqrt{3} + 1) / (\sqrt{3} - 1)$ ।
- › अब हर का परिमेयकरण करेंगे: $((\sqrt{3} + 1) / (\sqrt{3} - 1)) * ((\sqrt{3} + 1) / (\sqrt{3} + 1))$ ।
- › यह $(\sqrt{3} + 1)^2 / ((\sqrt{3})^2 - 1^2) = (\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3}) / (\sqrt{3} - 1) = (3 + 2\sqrt{3}) / 2$ बन जाएगा।
- › अंतिम उत्तर $3 + 2\sqrt{3}$ है।

उत्तर – $\tan 75^\circ = 3 + 2\sqrt{3}$ **उदाहरण 14. $\cot(15^\circ)$ का मान ज्ञात कीजिए।**

- › हमें $\cot(15^\circ)$ का मान ज्ञात करना है। हम 15° को दो ज्ञात कोणों के अंतर के रूप में लिख सकते हैं: $45^\circ - 30^\circ$ ।
- › तो, हम ' $\cot(x - y)$ ' के सूत्र का उपयोग करेंगे, जहाँ $x = 45^\circ$ और $y = 30^\circ$ है।
- › सूत्र है: ' $\cot(x - y) = (\cot x \cot y + 1) / (\cot y - \cot x)$ '।
- › मान रखने पर: ' $\cot(45^\circ - 30^\circ) = (\cot 45^\circ \cot 30^\circ + 1) / (\cot 30^\circ - \cot 45^\circ)$ '।
- › हम जानते हैं कि ' $\cot 45^\circ = 1$ ' और ' $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$ ' होता है।
- › मानों को सूत्र में रखेंगे: ' $(1 * \sqrt{3} + 1) / (\sqrt{3} - 1)$ '।
- › यह हो जाएगा ' $(\sqrt{3} + 1) / (\sqrt{3} - 1)$ '।
- › अब हर का परिमेयकरण (rationalize the denominator) करेंगे, ' $\sqrt{3} + 1$ ' से ऊपर-नीचे गुणा करेंगे।
- › तो, ' $(\sqrt{3} + 1)^2 / ((\sqrt{3})^2 - 1^2) = (\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3}) / (\sqrt{3} - 1)$ '।
- › यह बन जाएगा ' $(4 + 2\sqrt{3}) / 2$ '।
- › अंश और हर दोनों को 2 से भाग देने पर: ' $2 + \sqrt{3}$ '।

उत्तर – $\cot(15^\circ) = 2 + \sqrt{3}$ **उदाहरण 15. मान ज्ञात कीजिए: $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$**

- › यहाँ हम सूत्र ' $\sin x + \sin y = 2 \sin ((x + y)/2) \cos ((x - y)/2)$ ' का प्रयोग करेंगे।
- › $x = 75^\circ$ और $y = 15^\circ$ रखने पर:
- › $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin ((75^\circ + 15^\circ)/2) \cos ((75^\circ - 15^\circ)/2)$
- › $= 2 \sin (90^\circ/2) \cos (60^\circ/2)$
- › $= 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ$
- › अब, $\sin 45^\circ = 1/2$ और $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ के मान रखने पर:
- › $= 2 * (1/2) * (\sqrt{3}/2)$
- › $= (\sqrt{3}) / (2 \times 2)$

$$y = 3 / 2$$

हर का परिमेयकरण करने पर (rationalizing the denominator): $= (3 * 2) / (2 * 2)$

$$y = 6 / 2$$

$$\text{उत्तर} - \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 6 / 2$$

उदाहरण 16. सिद्ध कीजिए: $2 \sin 3x \cos 2x = \sin 5x + \sin x$

हमें ' $2 \sin x \cos y$ ' का सूत्र लगाना है, जिसमें $x = 3x$ और $y = 2x$ है।

सूत्र है: $2 \sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)$

मान रखने पर, $2 \sin 3x \cos 2x = \sin (3x + 2x) + \sin (3x - 2x)$

इसे सरल करने पर, $2 \sin 3x \cos 2x = \sin 5x + \sin x$

$$\text{उत्तर} - \text{सिद्ध हो गया: } 2 \sin 3x \cos 2x = \sin 5x + \sin x$$

उदाहरण 17. यदि $\sin x = 3/5$ है और x प्रथम चतुर्थांश में है, तो $\sin 2x$ का मान ज्ञात कीजिए।

सबसे पहले, हमें $\cos x$ का मान निकालना होगा। क्योंकि x प्रथम चतुर्थांश में है, $\cos x$ धनात्मक होगा।

सूत्र $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ का उपयोग करें। $\cos^2 x = 1 - (3/5)^2 = 1 - 9/25 = 16/25$

तो, $\cos x = (16/25) = 4/5$

अब, $\sin 2x$ का सूत्र ' $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ' लगाएं।

$\sin 2x = 2 * (3/5) * (4/5)$

$\sin 2x = 24/25$

$$\text{उत्तर} - \sin 2x = 24/25$$

बोर्ड परीक्षा के लिए खास

- कोण के चिन्ह से संबंधित प्रश्न अक्सर एक नंबर के लिए सीधे पूछे जाते हैं, इसलिए 'Clockwise' और 'Anticlockwise' के चिन्हों को बहुत ध्यान से याद रखें।
- डिग्री, मिनट और सेकंड के बीच के रूपांतरण (conversion) पर आधारित छोटे प्रश्न अक्सर पूछे जाते हैं, इसलिए इन मानों को अच्छे से याद रखना।
- डिग्री को रेडियन में या रेडियन को डिग्री में बदलने वाले सवाल अक्सर 1 या 2 नंबर के लिए आते हैं। 180° संबंध को हमेशा याद रखें।
- यह अवधारणा त्रिकोणमितीय फलनों को समझने के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। आगे चलकर $\sin x$ और $\cos x$ को परिभाषित करते समय, x को एक वास्तविक संख्या के रूप में देखा जाएगा, जो एक रेडियन माप भी होगी। इसलिए इस संबंध को अच्छे से समझना बहुत जरूरी है।
- यह संबंध बोर्ड परीक्षा में छोटे सवालों में सीधा पूछा जा सकता है, या बड़े सवालों में किसी कोण को बदलने के लिए इसका प्रयोग करना पड़ता है। हर सवाल में π का मान $22/7$ या 3.14 कब लेना है, यह सवाल में दिया होता है, ध्यान से देखना।
- यह ' $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ' सूत्र और अन्य फलनों की परिभाषाएं बोर्ड परीक्षाओं में सीधे प्रश्न या जटिल समस्याओं को हल करने का आधार बनती हैं, इसलिए इन्हें अच्छे से याद करना।
- चतुर्थांशीय कोणों पर मान याद रखना और आवधिकता के सूत्रों का उपयोग करना बोर्ड परीक्षा में त्रिकोणमितीय समीकरणों और मान ज्ञात करने वाले प्रश्नों में सीधा काम आता है।
- यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं में सीधे प्रश्न के रूप में कम आती है, लेकिन दूसरे बड़े त्रिकोणमितीय प्रश्नों को हल करने के लिए इसकी जानकारी बहुत जरूरी है।
- यह विषय बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। अक्सर एक या दो नंबर का प्रश्न 'प्रांत' या 'परिसर' पर सीधा पूछ लिया जाता है, खासकर ' $\tan x$ ', ' $\sec x$ ', ' $\cot x$ ', ' $\operatorname{cosec} x$ ' के लिए, क्योंकि इनमें 'undefined' होने की शर्त होती है। इन्हें अच्छे से याद कर लेना।

- यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। अक्सर एक फलन का मान और उसका चतुर्थांश देकर बाकी फलनों के मान निकालने का प्रश्न आता है, जिसमें चिह्न की सही पहचान करना ही सफलता की कुंजी है।
- ये $\cos(x+y)$ और $\cos(x-y)$ के सूत्र सीधे-सीधे बोर्ड परीक्षा में पूछे जाते हैं या इनका उपयोग बड़े सवालों में अनिवार्य रूप से होता है। इन्हें अच्छे से याद करना और इनका अभ्यास करना बहुत ज़रूरी है।
- यह सूत्र ' $\sin 15^\circ$ ' या ' $\sin 75^\circ$ ' जैसे मान निकालने के लिए सीधे प्रश्न में आ सकता है, इसलिए इसे रटकर याद कर लेना। सिद्ध करने वाले प्रश्न भी आते हैं।
- इन $\tan$ के सूत्रों पर आधारित प्रश्न अक्सर सीधे मान निकालने या सर्वसमिका सिद्ध करने के लिए आते हैं। अभ्यास प्रश्न 12 जैसा ' $\tan 13/12$ ' का मान ज्ञात करना अक्सर पूछा जाता है।
- यह सूत्र ' $\cot(x+y) = (\cot x \cot y - 1) / (\cot y + \cot x)$ ' बोर्ड परीक्षा में सीधा-सीधा पूछा जा सकता है या इसका उपयोग करके मान निकालने वाले प्रश्न आ सकते हैं। चिन्हों और हर में ' $\cot y$ ' के क्रम का विशेष ध्यान रखना।
- यह विषय बोर्ड परीक्षाओं और JEE Mains के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। सीधे सूत्र लिखने और सिद्ध करने वाले सवाल अक्सर आते हैं, इसलिए सारे सूत्रों को अच्छे से याद कर लें और उन पर आधारित सवाल हल करने का अभ्यास करें। ' $\cos x - \cos y$ ' वाले सूत्र में माइनस चिह्न का विशेष ध्यान रखें।
- यह टॉपिक बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इन सूत्रों से सीधे सवाल आते हैं जहाँ आपको बड़े-बड़े त्रिकोणमितीय व्यंजकों को सरल करना होता है या कोई समीकरण सिद्ध करना होता है। हर सूत्र को अच्छे से याद कर लेना और माइनस वाले चिह्न का खास ध्यान रखना।
- बोर्ड परीक्षाओं में इन सूत्रों पर सीधे प्रश्न आते हैं या फिर इन्हें बड़े प्रश्नों के बीच में इस्तेमाल करना होता है, इसलिए इन्हें अच्छी तरह से याद कर लें और हर सूत्र के सभी रूपों को समझें।

एक नज़र में रिवीज़न

- › त्रिकोणमिति = त्रिभुज मापना; कोण: प्रारंभिक, अंतिम भुजा, शीर्ष; वामावर्त (+), दक्षिणावर्त (-)
- › डिग्री माप = 360° एक पूर्ण घुमाव; $1^\circ=60'$, $1'=60''$
- › रेडियन: इकाई त्रिज्या पर इकाई चाप द्वारा बना कोण। रेडियन = $180^\circ/\pi$ । $l = r\theta$
- › इकाई वृत्त पर, रेडियन माप और वास्तविक संख्याएं समान होती हैं।
- › रेडियन = $180^\circ/\pi$; डिग्री $\Leftrightarrow$ रेडियन रूपांतरण सूत्र याद रखें।
- › इकाई वृत्त: $P(a,b)$ तो $\cos x = a$, $\sin x = b$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- › चतुर्थांशीय कोण अक्षों पर; 2 आवधिकता; $\sin x=0$ for $n\pi$; $\cos x=0$ for $(2n+1)\pi/2$.
- › ASTC नियम से फलनों के चिह्न; $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x)=-\sin x$.
- › त्रिकोणमितीय फलनों का प्रांत और परिसर: x के अनुमेय मान और फलन के आउटपुट मान।
- › चतुर्थांशों में त्रिकोणमितीय फलनों के मानों का चिह्न (sign) याद रखें: ASTC नियम।
- › $\cos(x\pm y)$ सूत्र: $\cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ (चिह्न उल्टा)
- › $\sin(x\pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ (चिह्न समान)
- › $\tan(x\pm y)$ सूत्र: $(\tan x \pm \tan y) / (1 \mp \tan x \tan y)$
- › $\cot(x \pm y)$ सूत्र: $\cot x \cot y \pm 1 / \cot y \mp \cot x$
- › CD सूत्र: योग/अंतर को गुणन में बदलना, कोण हमेशा $(x\pm y)/2$.
- › 2AB सूत्र: गुणन को योग/अंतर में बदलना ($2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$)
- › बहु कोण सूत्र: $2x$, $3x$ के मान को x के पदों में व्यक्त करते हैं.